Representación Algebraica de las Escalas Musicales

Carlos García Suárez
Doctor Ingeniero Industrial

14 Agosto 2003

Resumen

Durante los últimos treinta años, el ámbito de la teoría de la música ha ido incorporado un conjunto de conceptos y formulaciones matemáticas de sofistificación creciente. Entre éstas, se encuentran las que presentan y discuten las propiedades de las escalas musicales bajo la óptica y el lenguaje del algebrá moderna. La comprensión de estos conceptos resulta de utilidad para entender o abordar algunos desarrollos musicales modernos, tales como la música microtonal. Pero también resulta de utilidad para enmarcar, al menos en parte, el proceso histórico que, en el ámbito de las escalas musicales, se ha ido produciendo en los últimos siglos. En este ámbito, es notaria la carencia de trabajos que presenten aportaciones en idioma español. Por ello, este artículo se plantea realizar una recapitulación de algunas de estas aportaciones. En particular, este artículo presentará las escalas musicales como objetos matemáticos que, en algunos casos, pueden poseer las propiedades de lo que, en álgebra, se llama estructura de *grupo*. Se introducirá el importante concepto de generadores de una escala y se discutirán algunas representaciones y propiedades, específicas, de las escalas de más doce sonidos por octava. Finalmente, el artículo aporta una clasificación de las escalas atendiendo al número y tipo de sus generadores.

1. Introducción

Durante varios milenios las escalas musicales han constituido el ingrediente primario sobre el cual se ha construido la música. Diferentes civilizaciones, en diversas partes del mundo, han usado y usan escalas musicales diferentes.

Es una experiencia común que muchas de estas escalas conducen a estilos musicales característicos que, con frecuencia, evocan sentimientos y sensaciones diferenciados.

El hecho de que, por un lado, las escalas musicales presenten una cierta personalidad y de que, por otro, no resulten fijadas de forma unívoca por la naturaleza, sino que contengan un grado de arbitrariedad importante en su construcción, ha fascinado a músicos, físicos y matemáticos a lo largo de varios milenios. Esta fascinación, que hoy continua bien patente, ha incentivado el estudio de la estructura matemática de las escalas musicales.

La tradición suele asignar a Pitágoras (s. VI a.C.) los primeros intentos formales de identificar las relaciones aritméticas que subyacen bajo la consonancia de los sonidos. Relaciones que, en la Grecia antigua, dieron lugar a la construcción de escalas bien conocidas y documentadas [19], [2]. Sin embargo, parece cada día más claro que los Egipcios e, incluso, antes los Sumerios, ya en los albores de la historia, usaron escalas ligadas a relaciones numéricas bien establecidas [11].

En occidente, hasta que no llego el Renacimiento la escala indiscutiblemente usada fue la llamada Escala Pitagórica. Pero a partir de entonces comenzó un debate, que aún sigue vivo, sobre como modificar o ampliar dicha escala para mejorar sus consonancias o para permitir composiciones más complejas, sobre todo desde el punto de vista armónico. Durante siglos, esta discusión ha despertado el interés de músicos, científicos y matemáticos y ha dado lugar a la proposición de numerosas escalas [2]. Pero ha sido, en parte, siguiendo el proceso de búsqueda que se inicia a raíz del abandono del concepto de tonalidad a finales del siglo XIX y, más significativamente, por las oportunidades que la aparición del ordenador digital aporta en lo que se refiere a la generación de sonidos, que se ha producido un interés renovado por la construcción y utilización de escalas de más de doce sonidos por octava. En este proceso, se ha vuelto a poner de manifiesto que resulta de interés identificar cuales son las estructuras íntimas subyacentes en las habituales escalas occidentales. Esta identificación, al margen de ayudar a comprender mejor las escalas usadas en la actualidad, habría de facilitar la construcción de nuevas escalas que presentarán un buen potencial como materia prima para el trabajo de los compositores.

Son varios los trabajos que se han desarrollado en los últimos años en este ámbito. En este artículo, nos centraremos, en buena medida, en aquellos que han buscado dichas estructuras básicas en el *álgebra de grupos*. En este sentido, el trabajo que parece haber introducido el concepto de grupo aplicado a las escalas musicales es el Budden [3] [1] y, posteriormente, el de

[1]Budden también introduce el concepto de grupo al analizar ciertas simetrias y estruc-

Balzano [1] [2]. Balzano, específicamente, describe la aplicación de la teoría de grupos, pero centra su interés en la identificación de propiedades que permitan construir, lo que él considera, escalas diatónicas generalizadas: escalas que sean un subconjunto de una escala cromática más amplia y en las que puedan reconocerse algunas de las propiedades que la escala cromática de siete notas presenta frente a la escala cromática de doce. Reconociendo el interés de dichos esfuerzos, hemos omitido mayor referencia ha esta parte de su trabajo porque creemos, con Erlich [9], que presentan, un cierto grado de arbitrariedad.

2. Definición de escala musical

El objeto de esta sección es definir y presentar el objeto matemático que llamaremos escala musical. Para ello, y dado que la experiencia musical es de carácter principalmente sensorial, comenzaremos la formulación partiendo de un conjunto que representa una realidad física bien perceptible: el conjunto Γ de todos los tonos musicales posibles [3]. Una colección de n tonos puede ser representada por $\{\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n\}$ donde los $\tau_i \in \Gamma$. Puede definirse una aplicación ϕ entre los elementos de Γ y el conjunto de los números reales positivos $\Re^+$, de manera que, la imagen $\phi(\tau_i)$ de cada uno de los τ_i sea el valor numérico de la frecuencia del armónico fundamental del cada tono. Denominaremos $\Upsilon \in \Re^+$ al conjunto de imágenes así obtenido. Es decir,

$$\phi : \{\tau \mapsto f; \tau \in \Gamma, f \in \Upsilon\}$$

Es evidente que dos tonos diferentes, en particular de diferente composición armónica, pueden compartir una misma imagen y que, por lo tanto, la aplicación ϕ no tiene el carácter de una inyección.

Consideremos ahora el que denominamos como conjunto de *todos los intervalos posibles*

$$I : \{x; x \in \Re^+, x \geq 1\}$$

Definimos la aplicación $\delta : \{\Gamma \times \Gamma \mapsto I\}$, que asigna a cada par de tonos (τ_i, τ_j)un elemento de I que denominaremos *valor del intervalo*. La regla de

turas repititivas que se dan en el desarrollo de muchos pasajes musicales

[2]También existe una escuela Francesa, algo posterior en el tiempo, cuyo principal exponente es Hellegouarch [15].

[3]En este artículo se utiliza el término *tono* y *tono musical* para denominar, indistintamente, a un sonido armonicamente complejo producido por un instrumento musical y que, por lo tanto, en general consiste en la superposición de varios sonidos armónicamente puros cuyas frecuencias están en la proporción 1, 2, 3, ..., etc.. La acepción habitual de la palabra *tono* como intervalo no se utiliza en este artículo.

asignación es

$$\delta(\tau_i, \tau_j) = \frac{max\{\phi(\tau_i), \phi(\tau_j)\}}{min\{\phi(\tau_i), \phi(\tau_j)\}}$$

que da el cociente entre la frecuencia fundamental mayor y la menor de los tonos considerados. Es evidente que la aplicación δ no tiene, tampoco, un carácter inyectivo, ya que diversos pares de tonos pueden dar a la misma imagen o valor del intervalo.

Como ha podido verse, hemos partido del concepto de tono y de frecuencia para llegar al de intervalo. Este recorrido nos parece el más natural. Sin embargo, otros autores prefieren realizar su construcción sobre el conjunto de la frecuencias (p.e. [14]).

Es un hecho bien contrastado que existe una fuerte correlación entre la impresión subjetiva de consonancia o disonancia que producen dos tonos al sonar simultáneamente y el valor del intervalo entre dichos tonos. Y, en particular, que cuando dos tonos son tales que el valor de su intervalo es 2, se produce la máxima impresión de consonancia [4]. Este hecho sugiere considerar la relación binaria $\Im$ que se define, diciendo que dos intervalos $\{i_a, i_b \in I\}$ son equivalentes, y lo escribiremos como $i_a \Im i_b$, si y sólo si $i_a = i_b \cdot 2^z$ donde z es un número entero positivo o negativo, es decir[5]

$$\Im : \{i_a \Im i_b \Leftrightarrow i_a = i_b \cdot 2^z ; z \in Z\}$$

Es fácil comprobar que la relacción binaria $\Im$ es reflexiva, simétrica y transitiva y que, por lo tanto, puede considerarse como una *relación de equivalencia.* Denominaremos $C(i)$ a cada una de las clases de equivalencia a que da lugar $\Im$. La relación $\Im$ introduce una partición sobre el conjunto de los intervalos I ya que permite dividir dicho conjunto en un conjunto de subconjuntos disjuntos: los intervalos pertenecientes a cada una de las infinitas clases de equivalencia. El conjunto de todas las clases de equivalencia, con frecuencia denominado conjunto cociente, se puede escribir como $I/\Im$ y, en nuestro caso, lo denominaremos *octava.*

Es útil considerar el concepto de *representante canónico* de una clase de equivalencia. En el caso que nos ocupa, llamaremos representante canónico de la clase de intervalos $C(i)$ al miembro de dicha clase i^o que cumple $1 \leq i^o < 2$.

[4]Las razones físicas y fisiológicas son bien conocidas y han sido ampliamente discutidas a lo largo de los últimos siglos. Resulta especialmente interesante y recomendable el trabajo de Helmholtz[16] .

[5]A pesar de que la selección de $i = 2$ como elemento a partir del cual se configura todo el desarrollo posterior de la escalas es totalmente natural, desde un punto de vista teórico nada impediría elegir otro valor. Por ejemplo, la llamada escala de Bohlen-Pierce [23] es una escala de 13 tonos iguales repartidos en un intervalo de una doceava, es decir divide en trece partes el intervalo 3:1.

Es claro que cada clase tiene un único representante canónico. El conjunto de todos los representantes canónicos forma un subconjunto $I^o \subset I$ al que también podríamos denominar, sin crear confusión, *octava*.

En música, el análisis de las propiedades armónicas de los intervalos se centra, principalmente, en el estudio de las propiedades de consonacia o disonancia de los representantes canónicos I^o. Alguno de éstos reciben nombres particulares bien conocidos, entre los que están los de *tercera mayor justa* ($i^o = 5/4$) de *cuarta justa* ($i^o = 4/3$) y de *quinta justa* ($i^o = 3/2$) (ver cuadro 1). Ellis [7] ha recogido, enciclopédicamente, más de 150 nombres correspondientes a otros tantos intervalos del conjunto I^o.

Las consideraciones anteriores nos permitirían definir una *escala musical* Σ como una sucesión finita y ordenada de intervalos canónicos

$$\Sigma^o : \{i_1^o, i_2^o, \ldots, i_n^o\} \quad \text{donde} \quad i_1^o = 1,\ i_i^o < i_{i+1}^o,\ i_n^o < 2$$

o, tal vez de forma más propia, como un conjunto finito y ordenado de clases de intervalos

$$\Sigma^o : \{C(i_1^o), C(i_2^o), \ldots, C(i_n^o)\}$$

Ahora bien, conviene señalar que la definiciones clásicas de escala hacen más bien alusión a una sucesión de tonos más que de intervalos[6], por ello, y para evitar confusión, completaremos la denominación de esta escala llamándola *escala de intervalos* y la diferenciaremos así de la sucesión ordenada de tonos a la que llamaremos *escala de tonos* o *escala de clases tonos*. Para la construcción de una escala de tonos es necesario fijar un tono de referencia que llamaremos *tónica*.

Sea $\tau_1^o \in \Gamma$ un tono cualquiera, que actuará como tónica, y sea Σ^o una escala de intervalos, donde sus representantes canónicos se denotan por $\{i_k^o;\ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Podemos construir una escala de tonos, que llamaremos escala de τ_1^o en modo Σ^o como la sucesión ordenada de tonos $\{\tau_1^o, \tau_2^o, \ldots, \tau_n^o\}$ donde los τ_k^o se eligen de forma que generen un intervalo i_k^o con la tónica, es decir que $\delta(\tau_1^o, \tau_k^o) = i_k^o$.

La operación anterior, que no es más que la transposición de la escala de intervalos a la tonalidad marcada por la tónica, establece una biyección, dependiente del parámetro τ_1^o, entre el conjunto de intervalos I y el de tonos Γ. Dicha biyección permite inducir una relación de equivalencia sobre sobre Γ que llamaremos $\aleph(\tau_1^o)$. Esta relación de equivalencia se describe diciendo que dos tonos τ_j y τ_k están relacionados entre sí y, por lo tanto, pertenecen a

[6] Por ejemplo, Randel [21] :"A collection of pitches arranged in order from lowest to highest (...)" o Diccionario de la RAE [5] :"sucesión diatónica o cromática de las notas musicales"

Valor	Nombre	Valor	Nombre
1	**unísono**	7/5	quinta sub-menor
10/9	segunda menor	3/2	**quinta**
9/8	**segunda mayor**	8/5	sexta menor
8/7	supersegunda	5/3	**sexta mayor**
7/6	tercera sub-menor	12/7	sexta super-major
6/5	tercera menor	7/4	séptima armónica
5/4	**tercera mayor**	16/9	séptima menor
9/7	tercera super-mayor	9/5	septima menor aguda
4/3	**cuarta**	15/8	**séptima mayor**

Cuadro 1: Algunos intervalos justos con nombre propio [7]

la misma clase de equivalencia si los intervalos $\delta(\tau_1^o, \tau_j)$, $\delta(\tau_1^o, \tau_k)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia.

La relación de equivalencia $\aleph(\tau_1^o)$ permite generar, pues, unas clases de equivalencia que denominaremos $C(\tau_1^o; \tau)$, cuya agrupacción es la partición $\Gamma/\aleph(\tau_1^o)$ que resulta isomorfa con la anterior partición del conjunto de las clases de intervalos $I/\Im$.

Empleando este procedimiento de relación, algunos de los intervalos clásicos que poseen nombre propios característicos se corresponden con clases de equivalencia de tonos que también poseen nombre propios. Por ejemplo, los intervalos destacados en negrita en el cuadro 1 darían lugar a la conocida secuencia: do, re, mi, ...

3. Operaciones entre intervalos y estructuras de grupo

Sobre el conjunto de todos los intervalos I definimos una operación o ley de composición que denotaremos multiplicativamente, es decir por el símbolo '$\cdot$'. Esta ley de composición, que coincide con la multiplicación de números reales, permite hacer corresponder a los pares de valores de intervalos (i_j, i_k) un tercer intervalo $i_m = i_j \cdot i_k$.

Puede comprobarse que la ley es, lo que los matemáticos llaman, estable[7] respecto a la relación de equivalencia $\Im$ por lo que induce un ley de composición, que denotaremos por $\otimes$, sobre el conjunto de las clases de equivalencia

[7]Se dice que una ley es estable respecto a una relación de equivalencia si el compuesto de dos elementos cualesquiera a y b se cambia en un equivalente cuando se reemplazan a y b por dos elementos equivalentes.

$I/\Im$. Es decir que, además de operar con intervalos, se puede operar con *clases de intervalos* teniéndose el resultado de que si

$$i_j \cdot i_k \mapsto i_m \Rightarrow C(i_j) \otimes C(i_k) \mapsto C(i_m)$$

Por ejemplo si $i_1 = 3/2, i_2 = 4/3$ se tiene que $C(i_1) \otimes C(i_2) = C(2) = C(1)$, que es el elemento neutro dentro de $I/\Im$.

El conjunto cociente $I/\Im$ formado por todas las clases de equivalencia $C(i)$ y dotado de la operación $\otimes$ tiene todas las propiedades necesarias para ser considerado un *grupo* [8]. Como, una vez definido un tono que actué como tónica τ_1^o, y que podría interpretarse como un parámetro, se puede definir un isomorfismo entre el conjunto de las clase de tonos $\Gamma/\aleph(\tau_1^o)$ y el conjunto de clases de intervalos $I/\Im$ se deduce que puede definirse una operación $\bar{\otimes}$ que permite a Γ adquirir también estructura de grupo, es decir

$$\langle I/\Im, \otimes\rangle \quad \text{es un grupo isomorfo isomorfo con el grupo} \quad \langle \Gamma/\aleph(\tau_1^o), \bar{\otimes}\rangle$$

Pero nuestro interés, a la hora de estudiar las escalas musicales, no está los conjuntos anteriores de tonos e intervalos, que poseen ambos infinitos elementos, sino que se sitúa en subconjuntos finitos y ordenados de clases de tonos o clases de intervalos. Por ejemplo, nos interesa conocer que características habrían de tener subconjuntos del tipo $\Sigma^o : \{C(i_k^o); k = 1, \ldots, n\}$ para que mantegan las propiedades de grupo ya que esto nos aseguraria que operaciones entre intervalos son cerradas y que, por lo tanto, cualquier melodia puede transponerse a cualquier tonalidad. O dicho de otra forma, ¿qué estructura íntima ha de poseer la escala Σ^o para que ésta sea un *subgrupo* del grupo $\langle I/\Im, \otimes\rangle$?.

Para responder a esta pregunta de forma general, y para el posterior análisis de los diversos tipos de escalas, conviene definir el concepto de *generador de una escala*, que replica el conocido concepto generador en la teoría de grupos. Diríamos que el subconjunto $\sigma^o \subset \Sigma^o$ es un *sistema de generadores* de la escala Σ^o si todos los elementos de dicha escala pueden generarse cómo producto $\otimes$ de un número finito de elementos de σ^o o de sus inversos. Con esta definición es evidente que siempre puede encontrase al menos un subconjunto generador, si bien cabría considerarlo como de carácter impropio, ya que se trataría del conjunto Σ^o en sí mismo. Pero los casos interesantes se dan cuando existen sistemas de generadores con un número reducido de elementos. En ese caso, se pueden anticipar algunas propiedades de las escalas atendendiendo a sus generadores.

[8] La definición de grupo puede encontrarse en cualquier manual de álgebra, por ejemplo en [22] . Las propiedades más relevantes de un grupo son que: (1) la operación entre dos elementos del conjunto siempre da lugar a otro elementos del conjunto, (2) que todos los elementos tienen un inverso contenido en el conjunto y (3) que existe un elemento neutro.

El ejemplo más sencillo se da cuando un único elemento $C(i)$ es capaz de generar Σ^o. Denominaremos a dichas escalas como *monógenas*. Las escalas monógenas más importantes, por razones históricas y prácticas, son las conocidas *pentatónica* (de 5 elementos), *pitagórica* diatónica (de 7 elementos) y, la denominada *igualmente temperada* de 12 elementos. Historicamente se han propuesto también diversas escalas igualmente temperadas, y por lo tanto monógenas, de más de 12 elementos, tales como las escalas de 19, 22 y 31 elementos [2] y, de hecho, algunas de éstas son objeto de intensa discusión en la actualidad [9],[1].

Las escalas pentatónica y pitagórica poseen el mismo generador y éste es la clase de equivalencia que corresponde al intervalo de quinta justa $C(3/2)$, así se tiene:

- que la escala pentatónica se genera por las potencias sucesivas del generador $C(3/2)$ y es (realizando la ordenación correspondiente)

  $$C[(3/2)^o], C[(3/2)^2], C[(3/2)^4], C[(3/2)^1], C[(3/2)^3]$$

  empleando la notación exponencial para denotar el producto repetido cuyos representantes canónicos son: $\{1, 9/8, 81/64, 3/2, 27/16\}$

- que la escala pitagórica diatónica, continua la serie anterior en dos elementos más, dando lugar a

  $$C[(3/2)^o], C[(3/2)^2], C[(3/2)^4], C[(3/2)^6], C[(3/2)^1], C[(3/2)^3], C[(3/2)^5]$$

  cuyos representantes canónicos son:

  $$\{1, 9/8, 81/64, 729/512, 3/2, 27/16, 243/128\}$$

Conviene notar que cualquiera de los representantes canónicos de estas dos escalas se puede escribir como $2^r \cdot 3^s$ donde r y s son números enteros. A veces se utiliza esta consideración para denominar a estas escalas como escalas de límite-3, en el sentido que solamente se han utilizado para su construcción números primos menores o iguales que 3 [20]. La habitualmente denominada *escala de entonación justa* [9], necesita de una construcción límite-5, o lo que

[9] La definición que consideramos aquí de *escala de entonación justa* es la de Randel [21] "Any tunning that incorporates five or more acoustically pure types of intervals within the octave; in the case of the diatonic or chromatic scales, those based on acoustically pure major thirds and acoustically pure fifths"; cuya intención es similar a al de Barbour [2] "a 12 note system that contains some arragement of pure fifths and major thirds"; es decir la que habitulamente se denomina *escala de entonación justa* no pretendería la reproducción exacta de la serie armónica, ya que esta hace aparecer intervalos justos tales como el del séptimo armónico 7/4 (o séptima armónica o natural) que no puede reducirse a una combinación de terceras mayores y quintas justas.

es lo mismo, de un sistema de generadores no basado únicamente en la quinta C(3/2), sino, por ejemplo, la tercera mayor justa C(5/4). Por ello la escala justa (límite-5) no es monógena. Tampoco serían monógenas, al necesitar tres y cuatro generadores respectivamente, las escalas de limite-7 y límite-11 que se vienen describiendo en las últimas décadas [20], [9] y a las que nos referiremos más adelante.

Es fácil comprobar que ni la escala Pentatónica ni la Pitagórica forman un subgrupo de I^o ya que no son conjuntos cerrados frente a la operación $\otimes$. Es decir, la adición sucesiva de quintas justas da lugar, como es bien sabido, a una serie infinita de clases de intervalos diferentes.

Ambas escalas son parte de lo que Ellis [8] denominó *temperamentos lineales* [10]. Como se verá en la siguiente sección, este resultado puntual puede generalizarse facilmente atendiendo al hecho de que el número 2, base de la relación de equivalencia elegida, y el número 3, el generador de la escala, son números primos entre sí.

4. Escalas monógenas de n elementos

Como ya se ha indicado nos interesa conocer que condiciones ha de cumplir una escala monógena finita para que sea un grupo. La propiedad de grupo es esencial ya que es la que nos asegura que las operaciones entre elementos del conjunto es cerrada y que, por lo tanto, cualquier melodía puede transponerse a cualquier tonalidad empleando, exclusivamente, las notas de la escala. Esta propiedad es la que Ellis [8] asoció a lo que él denomino “temperamentos cíclicos”, es decir escalas en que, a partir de una cierta nota, la sucesión de notas de notas de la escala vuelve a repetirse. Como puede anticiparse, estás escalas son las habitualmente denominadas “igualmente temperadas”,

Conviene estudiar, por lo tanto, las propiedades de los grupos monógenos. Afortunadamente, este tipo de grupos han sido ampliamente estudiados en álgebra con lo que podemos obtener los resultados que deseamos simplemente recuperando dichos trabajos de los manuales de álgebra (p.e. [22]). A tal fin, y para simplificar la exposición, estudiaremos dichas propiedades en términos generales para un grupo G y para un generador a.

Sea a un elemento cualquiera de un grupo G donde la ley de composición interna se denota multiplicativamente y el elemento neutro es denominado como e. El conjunto generado por las potencias a^r, siendo r un número entero, es un subgrupo de G, diciéndose que está engendrado por a. Sobre este grupo monógeno cabe considerar dos posibles casos. A saber, que siendo p y q dos números enteros, se cumpla

[10] “an endless series of notes which never recur in pitch”

1. que si $a^p = a^q$ se implica necesariamente que $p = q$. Entonces el subgrupo generado comprende una infinidad de elementos, y se denomina grupo monónogeno infinito.

2. que existan algunos p, q, con $(p-q) = k > 0$, tal que se cumple $a^p = a^q$ o lo que es lo mismo tal que $a^{(p-q)} = a^k = e$. En este caso el grupo monógeno es finito.

Para este segundo caso, designemos por n el menor número positivo para el cual $a^n = e$. Se dice entonces que se trata de un *un grupo cíclico de orden* n y los $\{a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}\}$ son todos distintos, y cualquier otro elemento del grupo coincide con uno de ellos. Si p es un entero cualquiera (positivo o negativo), podrá escribirse $p = qn + r$, siendo q un entero y $0 \leq r < n$, de donde $a^p = a^{qn} \cdot a^r = a^r$, siendo entonces a^r el representante canónico de la clase de equivalencia consituida por todos los a^p.

Cualquier grupo cíclico finito de orden n, que llamaremos C_n, es isomorfo con $\mathbf{Z}_n$, el conjunto de los enteros dotados de la operación *adición módulo* n [11]. Igualmente, cualquier grupo cíclico infinito es isomorfo con el conjunto infinito de los números enteros $\mathbf{Z}$.

Volvamos ahora al estudio de las escalas generadas por la quinta justa (tales como la escala Pitagórica). Para que una escala de este tipo fuese un grupo cíclico de orden 12, debería cumplirse que $C[(3/2)^{12}] = C(2)$ o lo que es lo mismo que, $3^{12} = 2^q$ donde q sería algún número entero. Pero esto es imposible ya que 3 y 2 son primos entre si.

De lo anterior se infiere que para que una clase de intervalos $C(i_g)$ pueda ser generador de una escala cerrada, es decir que sea un grupo finito, debe ocurrir que $i_g^n = 2^m$ para algún $n, m \in Z^+$ siendo $m < n$. Para $n = 12$, si tomamos $m = 1$, el intervalo generador es el conocido semitono temperado, $C(i_g) = C(2^{1/12})$ y se obtiene la actual escala igualmente temperada de 12 notas, que es isomorfa con $\mathbf{Z}_{12}$ y que por analogía podríamos llamar C_{12}. Si se toma $n = 3$, el generador correspondiente sería $C(i_g) = C(2^{1/3})$ o lo que es lo mismo, una tercera mayor temperada y se obtendría una escala de solamente 3 tonos distintos *do, mi, sol* $\sharp$ que es isomorfa con $\mathbf{Z}_3$. Todas estas escalas son cerradas, de hecho todas son subgrupos de la escala C_{12}.

De forma más general, para cada m elegido, se generaran n/m elementos distintos siempre y cuando m sea un divisor de n. Si m y n son primos entre si (por ejemplo con $m = 7$ el caso de una escala de 12 notas, $n = 12$), ocurre que $C(i_g) = C(2^{m/n})$ (en el ejemplo $2^{7/12}$, que es una quinta temperada) es un generador completo de C_n, es decir genera los n elementos diferentes de dicho grupo cíclico. Es decir que, al margen del generador básico i_g también

[11] La operación $mod_n(z)$ da el resto de dividir un número entero z por n.

serán generadores del grupo cíclico completo C_n, todas las potencias de i_g^m tales que m y n sean primos entre sí.

Este resultado es bien conocido en la teoría de grupos y puede resumirse en la siguiente proposición: en un grupo cíclico de orden n el número de generadores diferentes viene dado por la función φ de Euler, representada por $\varphi(n)$.

La función $\varphi(n)$ puede calcularse utilizando el *teorema fundamental de la aritmética* que expresa que todo entero positivo n se descompone de manera única, excepto por una reordenación de factores, en un producto de números primos $p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, \ldots, p_k^{r_k}$. Entonces la función es

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{r_1 - 1} \ldots (p_k - 1)p_k^{r_k - 1}$$

.

En el caso de las escalas musicales igualmente temperadas esto tiene algunas consecuencias interesantes. Como ya hemos dicho en el caso de la habitual escala de 12 tonos, se tiene que $\varphi(12) = 4$ es decir que existen los cuatro generadores básicos ya comentados: el semitono i_g^1, donde $i_g = 2^{1/12}$, la cuarta i_g^5, la quinta i_g^7 y la séptima mayor i_g^{11} [12]. Todos generan la misma escala aunque hacen aparecer los intervalos en ordenes diferentes, que recuperan su ordenación habitual al expresar la escala en función de sus clases de equivalencia de intervalos. Los estudiantes de música reconocerán este resultado ya que con frecuencia son obligados a "hacer escalas" por semitonos ascendentes $C(i_g^1)$, por semitonos descendentes $C(i_g^{11})$, o por los llamados "círculos de cuartas" $C(i_g^5)$ y de *quintas* $C(i_g^7)$ [13]. Cuando se hacen escalas empleando otros intervalos, por ejemplo, por segundas mayores $C(i_g^2)$ el estudiante comprueba que no recorre todas la notas sino solo un subconjunto, un subgrupo realmente de seis notas. Este resultado puede generalizarse, diciendo que, al margen del caso impropio $C_k \equiv C_n$, resulta que C_k es un subgrupo de C_n si y sólo si k (o el inverso de k modulo N) divide a n, es decir $mod_k(n) = 0$.

Otra cuestión que resulta aparente de la discusión anterior es que es posible encontrar sistemas de generadores que no contengan explícitamente un generador básico $C(i_g)$. En efecto, basta con elegir, por ejemplo, parejas de elementos del grupo tales que $i_{g_1} \cdot i_{g_2} = i_g$ lo cual en un grupo cíclico es muy fácil ya que, por ejemplo, $i_{g_i}^{-1} \cdot i_{g_{i+1}} = i_g$ por definición. En el caso de las escala musical igualmente temperada podría tomarse, por ejemplo, una tercera mayor i_g^4 y una tercera menor i_g^3 ya que su combinación aplicada

[12] $1, 5, 7$ y 11 son los únicos números menores que 12 con son primos con 12

[13] Como es bien sabido, desde un punto de vista histórico, la escala igualmente temperada de doce tonos surge, de hecho, de temperar las quintas, de forma que doce quintas sean equivalentes a siete octavas, es decir de manera que se pueda cerrar el circulo de quintas

sucesivamente genera el subgrupo completo. Es decir cualquier tono de la habitual escala temperada puede expresarse como una combinación de terceras mayores y menores temperadas. Este resultado es otro aspecto de lo que Balzano [1] llama la "tercera representación" de C_{12}. Pero lo mismo ocurriría con las cuartas y las terceras mayores con cualquiera de los inversos de la combinaciones anteriores, por ejemplo una tercera mayor y una sexta mayor.

De forma más general, cualquier grupo cíclico de orden n, en el que n puede expresarse como el producto de una pareja de números primos p, q, puede descomponerse en el *producto directo* de dos subgrupos cíclicos de ordén p y q [22] .

5. Selección de escalas monógenas con más de doce elementos

De las secciones anteriores resulta evidente que es posible generar infinitas escalas monógenas de más de doce elementos por octava. De hecho, al margen de las consideraciones algebraicas aquí realizadas, a lo largo de la historia se han realizado múltiples propuestas y ensayos con escalas igualmente temperadas de más de doce sonidos por octava [2].

Entre estas referencias históricas, puede destacarse, por ejemplo, la de Nicola Vicentino (1511-1576) que propuso una escala temperada de tonos de 31 sonidos y dió instrucciones para la construcción de un archicembalo [14] capaz de dar dichos sonidos. Esta escala fué, un siglo más tarde, defendida vivamente [17] y su construcción clarificada, mediante la utilización de los logaritmos, por el físico holandes Christian Huyghens (1629-1692). Huyghens argumenta que esta escala permite un ajuste muy bueno y equilibrado a los intervalos más consonantes. Más recientemente, el matemático y músico holandes Adriaan Fokker (1887-1972) ha defendido [12] esta escala como una solución casi óptima al problema de reproducir los intervalos justos, con una escala igualmente temperada. Esta escala, de 31 sonidos, da lugar, por ejemplo, a unas quintas (y cuartas) ligeramente peores que las de habitual escala de 12 sonidos, pero, sin embargo, mejora notablemente la consonacia de las terceras mayores y menores (y, por lo tanto, de las correspondientes sextas), así como de las séptimas armónicas.

El problema de decidir cuantos sonidos debe tener una escala monógena para ser realmente útil a los compositores e interpretes es interesante ya que,

[14]Este término aparece, por primera vez en, el tratado de Vicentino [25] y se refiere a un clavicordio de doble teclado y teclas dobles, probablemente inventado en la primera mitad del siglo XVI.

realmente, no tiene una respuesta que resulte indiscutible. Por ejemplo, si lo que se busca es representar las consonacias naturales de una forma lo más precisa posible (con el fin, por ejemplo, de llevar a cabo composiciones tonales), nos enfrentamos al problema de como medir el grado de ajuste de una escala dada a los intervalos justos que se derivan de la serie armónica. Si nuestro interés esté en disponer de una escala que reproduzca bien las quintas justas, las terceras mayores justas y las séptimas armónicas, compararíamos los correspondientes intervalos aproximados de la escala bajo estudio con aquellos intervalos justos, y nos encontramos que tendríamos que decidir como valorar dichas diferencias. Por ejemplo, ¿qué es mejor, unas terceras y séptimas bastante ajustadas a costa de unas quintas peores? o todo lo contrario. En suma, se hace necesario disponer de una métrica que permita medir esta diferencia. Por otro lado, estaría la discusión, en la que no entramos aquí, del compromiso entre la exactitud de la escala y su dificulta de utilización práctica, sobre todo si se considera su utilización via instrumentos más o menos clásicos y no solamente via música controlada por ordenador.

Fooker[12] propone una métrica de este tipo consistente en la desviación media cuadrática de los intervalos generadores básicos (por ejemplo, la quinta justa, la tercera mayor justa la séptima armónica) con los correspondientes de la escala bajo análisis. Con esta métrica, así como con otras similares que pueden ensayarse, efectivamente resulta que la escala igualmente temperada de 31 sonidos presenta unos niveles de ajuste muy interesantes. En un trabajo posterior Fokker[13] realiza un análisis sistemático de la capacidad de ajuste de diversas escalas igualmente temperadas para reproducir, progresivamente, armónicos más altos. Así dependiendo de si el objetivo esta en ajustar las quintas y terceras, o si también se desea ajustar las séptimas armónicas, las onceavas y las treceavas se obtienen diferentes resultados. En sus conclusiones Fokker propone de hecho que se adopte la escala de 31 sonidos como un primer nivel de mejora respecto a la situación actual y que, en el futuro, se consideré, según la creacción musical lo fuese demandando, pasar a escalas de más subdivisiones [15].

Un aspecto relacionado con la selección y utilización de las escalas de más de doce sonidos por octava y la conveniencia o no de identificar lo que se ha dado en llamar “escalas diatónicas generalizadas”. Éstas consistirían en subjconjuntos de una escala que permitiesen asegurar una cierta coherencia armónica o melódica. Los criterios para extraer un subconjunto “diatónico” de una escala monógena cualquiera han sido objeto de discusión por varios

[15] La siguiente escala que mejora, en general, la respuesta de la escala de 31 elementos es la de 41, que permite capturar mejor los armónicos superiores al séptimo. Una escala que no alcanza la respuesta de la de 31 sonidos pero que mejora la de 12 sonidos y, no resulta demasiado compleja, es al de 22, que ha sido recientemente defendida por Erlich [9]

autores [1], [18], [10], [9] no habiéndose alcanzado un consenso al respecto.

6. Escalas no monógenas

Nos hemos referido al sistema de generadores de una escala como aquel conjunto de intervalos que permite obtener cualquier intervalo de la escala como el producto de un número finito de sus elementos. Un caso de particular importancia es el caso de las escalas monógenas en las que el generador es único y en las que se dan dos casos: escalas abiertas y escalas cerradas.

Pero a lo largo de la historía se han propuesto y usado escalas de gran importancia que no respoden al modelo monógeno y que, de hecho, necesitan dos o más generadores. Entre éstas, las más importante históricamente son algunas de las escalas de afinación mesotónica. También son escalas no monógeneas las habitualmente llamadas escalas de entoncación justa (exceptuando la de dimension 1 que sería la escala Pitagórica y que es monógena ya que tiene como único generador la quinta justa).

Es bien conocida la importancia histórica de las escalas de afinación mesotónicas y su estructura y variantes son bien conocidas[16], por lo que aquí nos limitaremos a una brevísima descripción que nos permita completar nuestra presentación. En términos resumidos las escalas de afinación mesotónica consisten básicamente en sacrificar, en una cierta proporción la exactitud de las quintas, para asegurar una terceras mayores perfectas o casi perfectas. En la versión más simple de esta escala las quintas son reducidas en un cuarto de una coma sintónica, de manera que 4 cuatro quintas consecutivas produzcan una tercera mayor [17]. Como es bien sabido, el encadenamiento de estas quintas planas, da lugar, al completar la octava, a la aparición de una quinta muy desafinada que es la conocida quinta *del lobo* o “quinta haullante” que impedia la utilización de tonalidades alejadas de la empleada como referencia en el proceso de afinación. Esta escala, en su versión más simple, tiene un único generador: la quinta temperada (la justa menos el cuarto de coma sintónica). La quinta del lobo necesaria para completar la octava se deduce automaticamente La quinta temperada sería de 696,58 Cents y la “quinta del lobo” sería de 737,64 Cents. Sin embargo, sobre esta versión inicial de la escala mesotónica se han propuesto otras que necesitan más de un generador. Por ejemplo, Barbour [2] menciona un temperamente mesotónico en que el

[16]existen muchas versiones de escalas mesotónicas, el lector interesado puede consultar Barbour [2]

[17]Una coma sintónica es justamente la diferencencia entre una tercera pitagórica $2^{-6}3^4$ y una tercera justa $5/4$, que expresada en términos de cents [7] es de, aproximadamente, $21,05$

exceso de la quinta del lobo es repartido en dos quintas. Ellis menciona que este temperamento estuvo en uso en Inglaterra durante una parte del siglo XIX. Es claro que en este caso, a la quinta temperada original hay que añadir esta segunda quinta del lobo reducida. Estamos pues en un caso de escala con dos generadores.

Otra escala, o mejor familia de escalas, que requiren más de un generador son las escalas justas. Aquí conviene aclara que hemos de entender por este término. Según la definición de Barbour [2] aportada más arriba, la escala justa sería aquella que emplease una cierta combinación de quintas y terceras justas. Las referencias históricas a este tipo de escala se remontan a Plotomeo y, más recientemente, al teorico renacentista español Bartolomé Ramos de Pareja [6]. Pero esta concepción inicial se ha ido generalizando y a lo largo del siglo XX se han ido estudiando escalas en que pudieran ser justos los armónicos límite-7 e incluso límite-11 [20]. Por ello en términos matemáticos, podríamos definir una escala de entonación justa como aquella en que todos sus intervalos pueden expresarse como una sucesión de potencias de números primos de la forma $2^{r_0} \cdot 3^{r_1} \cdot 5^{r_2} \cdot 7^{r_3} \cdot 11^{r_4} \ldots$, donde los r_i son números enteros, positivos o negativos, el número primo que se elija para detener la sucesión sería el "límite de la escala". Bajo esta terminología, la escala pitagórica es una escala límite-3, la justa tradicional es límite-5, etc. En este contexto, es interesante recordar el trabajo de Adriaan Fokker[12]. Fokker propuso y utizó una representación gráfica de las escalas de entonación justa en la que los intervalos generados por cada uno de los números primos se representan en ejes separados de un espacio de n dimensiones. De esta representación se excluye el número 2 ya que este forma parte de la relación que permite establecer las relaciones de equivalencia y por lo tanto no aporta nuevos intervalos "per se". La lógica de esta representación es clara, cada número primo genera unos intervalos que le son propios e independientes de los generados por los otros números primos, por ello pueden considerarse como un "generador" independiente o como una *dimensión*.

Posiblemente lo más útil para explicar este concepto es presentar un ejemplo. La figura 1 muestra los intervalos generados por encadenamiento sucesivo de quintas y terceras justas. Las quintas se mueven en horizontal hacia la derecha y la terceras mayores en vertical ascendente. Como es lógico el movimiento de quintas hacia la derecha puede verse, también, como un movimiento en cuartas hacia la izquierda. La que podría llamarse escala de entoncación justa "clásica se ha destacado mediante un sombreado". Puede realizarse una representación similar, aunque algo más compleja, en tres dimensiones para recoger las escalas límite-7. Como es lógico, aunque el concepto sigue siendo útil, para escalas límite-11 y superior la representación gráfica deja de ser factible.

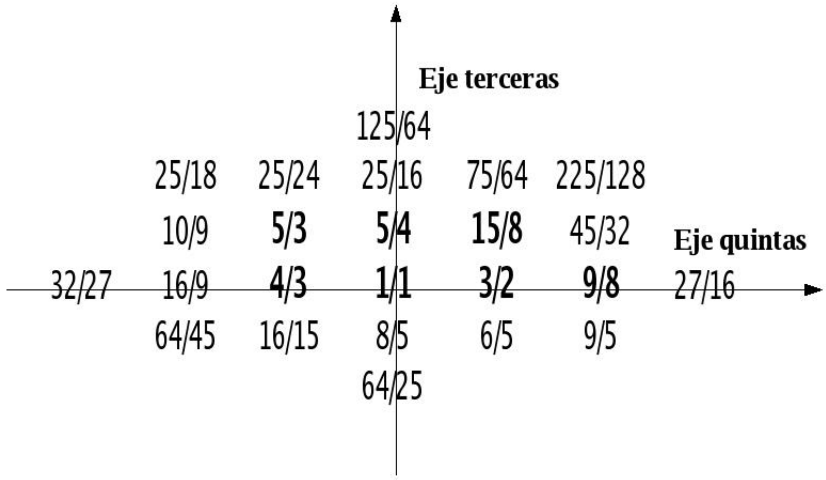

Figura 1: Representación de la escala justa límite-5

Fokker, además, utiliza esta visión espacial de las escalas para introducir dos conceptos de interés el de *vectores unísonos* y *bloques periódicos*, ambos se emplean, fundamentalmente, como medios para reducir las escalas abiertas e infinitas propias de la entoncación justas a escalas cerradas.

La representación de estas escalas en el plano o en el espacio nos sirven para visualizar de una forma sencilla como la introducción de más de un generador da lugar, inevitablemente, a escalas abiertas. El único caos en que esto no se produciría sería aquel en los dos generados generasen, cada uno por su lado, escalas igualmente temperadas, por ejemplo de n_1 y n_2 elementos. En ese caso la escala producto es cerrada, pero además resulta ser una escala igualmente temperada con un número de elementos que se corresponde con en mínimo común multiplo $mcm()$ de n_1 y n_2, cuyo generador sería $2^{mcm(n_1,n_2)}$, es decir se reduce a una escala cerrada de un único generador.

7. Clasificación de las escalas atendiendo a su estructura

Las consideraciones realizadas en las secciones anteriores nos permitirían abordar una clasificación de las escalas atendiendo a al número y tipo de sus generadores. Existen varias clasificaciones de este tipo. Por ejemplo, como ya se ha mencionado, Ellis [8] clasifica las escalas o, más exactamente, los temperamentos en dos categorías: los *lineales* que contienen una serie infinita de notas que jamás se cierra y los *cíclicos* en los que las notas, a partir de un cierto punto, comienzan a repetirse. Estos últimos son necesariamente los que se vasan en una división de la octava en n intervalos iguales.

Por su parte Barbour[2] no propone un clasificación 'per se' pero la agrupación de escalas y temperamentos que presenta un su excelente obra sirve como tal, a saber: *escalas griegas, mesotónicas, de entonación justa, de división múltiple* y los llamados *sistemas irregulares*. Esta agrupación atiende, sobre todo, a razones de tipo histórico y de utilización práctica de las escalas.

Un intento más explícito de clasificar las escalas en base a su estructura algebráica es el de Lindley y Tuner-Smith[24]. Éstos proponen dividir las escalas en las de temperamente igual y las armónicas, entendiendo por estas todas aquellas en que sus generadores tienden a reproducir algunos de los intervalos básicos. A su vez éstas podrían clasificarse en base a dos criterios alternativos. Según el primero quedarían divididas en escalas uni, bi o tri-dimensionales dependiendo del número de generadores. Según el segundo se dividirian en 'coherente' y 'no-coherentes'. Las primeras son aquellas en que, segűn sus palabras 'todos las notas dan lugar a una cadena de quintas'. Las coherentes se dividirian a su vez en 'regulares', 'semi-regulares' e 'irregulares' atendiendo a la distribución de los tamaños de los generadores involucrados. Su clasificación resulta algo confusa porque sus categorías no son claramente excluyentes entre sí.

Aquí proponemos una clasificación que atienda de manera clara al número y tipo de generadores necesarios para la construcción de la escala. Aunque el interés práctico está, fundamentalmente, en escalas comprendidas en el ámbito de una octava, proponemos establecer una división previa atendiendo a que emplearse en lugar de la octava otro intervalo como generador de las clases de equivalencia, estamos pensando aquí en escalas del tipo de la mencionada de Bohlen-Pierce[23] en que la equivalencia se construye a partir del ratio 3/1. Aún cabría todavía una división previa adicional para separar las escalas que no poseen niún intervalo de equivalencia. Estas escalas, lógicamente, son abiertas.Entre las propuestas en esta categoría podrían señalarse las indicadas por Wendy Carlos[4] .

Centrándonos en las escalas construidas en el ámbito de una octava, proponemos que la estás se clasifiquen atendiendo al número de generadores (o dimensiones) necesarios para su construcción, empleando este número para hacer referencia al número de dimensiones que requeriría su representación gráfica. Así tendríamos las escalas uni-dimensionales, las bi-dimensionales, etc. Cada una de estas categoría se dividiría luego en escalas abiertas o cerradas. Cerradas son aquellas que permiten la trasposición exacta de todos los intervalos y que son, necesariamente, siempre de temperamento igual. Las abiertas son aquellas que no permiten esta transposición sin límite. A su vez las escalas abiertas, tanto las de una como las de dos o más dimensiones, las dividiriamos, atendiendo al tipo de generadores utilizados, en justas, aquellas que empleen, exclusivamente los generadores basados en los números primos (y que, por lo tanto, para cada dimensión n serían realmente las escalas *límite-n* ya explicadas. Finalmente, quedarían las escalas de cualquier dimensión (mayor que 1) en que sus generadores no son ni todos iguales, ni coinciden con los ratidos de los números primos.

Esta clasificación queda más clara atendiendo al diagrama siguiente en el que se aportan ejemplos de cada uno de los tipos mencionados. En el diagrama hemos hecho referencia al número de dimensiones de las escalas en vez al número de generados, pero ambos términos resultan intercambiables.

- Escalas musicales
  - Basadas en la octava
    - 1 Dim
      - Cerradas: Igualmente temperadas
      - Abiertas
        - Entonación Justa *(Pitagórica)*
        - Otras *(p.e. mesotónica)*
    - 2 Dim
      - Cerradas: Se reducen al caso de 1 D
      - Abiertas
        - Entonación Justa *(Límite-5)*
        - Otras *(p.e. algunas mesotónicas modificadas)*
    - 3 Dim
      - Cerradas: Se reducen al caso de 1 D
      - Abiertas
        - Entonación Justa *(Límite-7)*
        - Otras
    - n Dim
      - Igual que en los casos anteriores
  - Basadas en otros intervalos de equivalencia
    - Por ejemplo el intervalo 3/1 de la escala de Bohlen-Pierce

8. Conclusiones

Este artículo ha presentado algunos resultados derivados de la aplicación de la teoría de grupos al análisis y construcción de escalas musicales. Dicha aplicación ayuda a comprender la estructura íntima de las escalas musicales. En el caso de la habituales escalas de 12 elementos, la aplicación de dichas ideas da lugar, como no podía ser de otra forma, a resultados bien conocidos. Sin embargo el formalismo empleado puede resultar útil a la hora de proponer y considerar escalas con más de 12 elementos. En relación a este aspecto se ha discutido cuales pueden ser algunos de los criterios que pueden emplearse en la elección de las escalas más adecuadas. La última palabra quedará, sin embargo, en manos de los compositores, que habrán de encontrar formas de expressión que den sentido y que creen belleza en base al material sonoro que estas escalas expandidas aportan.

Finalmente, el artículo, ha propuesto una clasificación de las escalas musicales atendiendo, principalmente, al tipo y número de sus generadores. Esta aproximación permite presentar la infinita variedad de escalas posibles de una manera sencilla y comprehensiva que puede facilitar la labor de estudio y de investigación.

Referencias

[1] Gerald J. Balzano. The group-theoretic description of twelvefold and microtonal pitch systems. *Computer Music Journal*, 4:66–84, 1980.

[2] J. Murray Barbour. *Tunning and Temperament: A Historical Survey.* Michigan State College Press, East Lansing, 2nd ed. (1961) edition. edición original de 1951.

[3] Frank J. Budden. *The Fascination of Groups.* Cambridge University Press, 1972.

[4] Wendy Carlos. Three asymmetric divisions of the octave. http://www.wendycarlos.com/resources/pitch.html.

[5] Real Academia Española de la Lengua, editor. *Diccionario de la Lengua Española.* Real Academia Española de la Lengua, vigésima edición edition, 1984.

[6] Bartolome Ramos de Pareja. *Musica practica.* Thesaurus Musicarum Latinarum. School of Music. Indiana University, Bloomington, IN 47404, la edición original fue impresa en bolonia en 1482 edition. La versión original en Latín puede consutarse en http://www.music.indiana.edu/tml/15th/RAMMP1T1_TEXT.html.

[7] Alexander J. Ellis. *Musical intervals not exceeding an octave, arrangeed in order of width.* Dover Publications, 1885. Sección D del Anexo XX del libro de Hermann Helmholtz.

[8] Alexander J. Ellis. *On temperament.* Dover Publications, 1885. Sección A del Anexo XX del libro de Hermann Helmholtz.

[9] Paul Erlich. Tunning, tonality, and twenty-two-tone temperament. *Xenharmonikon*, 17:12–40, Spring 1998. revisado en Abril 2002.

[10] Agmon Eytan. A mathematical model of the diatonic system. *Journal of Music Theory*, 33(1):1–26, 1989. no disponible.

[11] Henry George Farmer. The music of ancient mesopotamia. In Oxford University Press, editor, *The New Oxford History of Music.*, volume Ancient and Oriental Music, pages 228–254, 1957, reprinted 1999.

[12] Adriaan Daniël Fokker. Les mathématiques et la musique. http://www.xs4all.nl/ huygensf/doc/mm4.html, 1947. Archives du Musée Teyler vol. 10, Martinus Nijhoff, Den Haag.

[13] Adriaan Daniël Fokker. On the expansion of the musician's realm of harmnoy. http://www.xs4all.nl/ huygensf/doc/realm.html, 1967.

[14] J. Girbau. Les matematiques i les escales musicals. *Butl. Sec. Mat.*, 18: 3–27, 1985.

[15] Y. Hellegouarch. A la recherce de l'aritmetique qui se cache dans la musique. *Gazette des Mathematicians*, 33:71–80, 1987.

[16] Hermann Helmholtz. *On the Sensations of Tone*. Dover, 1954 (copia de la segunda edición inglesa de 1885) edition. La primera versión original, en Alemán, es de 1863.

[17] Christian Huygens. Lettre touchant le cycle harmonique. http://www.xs4all.nl/ huygensf/doc/lettre.html, 1691.

[18] J. Clough & G. Myerson. Variety and multiplicity in diatonic systems. *Journal of Music Theory*, (29):249–270, 1985. no disponible.

[19] Donald J. Grount & Claude V. Palisca. *A History of Western Music*. W.W. Norton & Company, W.W. Norton & Company Inc., 500 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10110, sexta edición (primera edición de 1960) edition, 2001. ISBN 0-393-97527-4.

[20] Harry Partch. *Genesis of a Music*. Da Capo Press, 1974. primera edición 1947.

[21] Don Michael Randel. *The New Harvard Dictionary of Music*. The Belknap Pressof Harvard University Press, 1986. Rev. of the Havard Dictionary of Music, Willi Apel. 2nd ed. 1969.

[22] A. Lentin & J. Rivaud. *Algebra Moderna*. Aguilar, 1973. Traducción de la version original en Frances de 1969.

[23] Max V. Mathews & John R. Pierce & A. Reeves & L. A. Roberts. Theoretical and experimental explorations of the bohlen-pierce scale. *J. Acoust. Soc. Amer*, (84):1214–1222, 1988. Puede verse también http:// members.aol.com/ bpsite/ index.html.

[24] Mark Lindley & Ronald Turner-Smith. An algebraic approach to mathematical models of scales. *Music Theory Online*, 0(3), June 1993. disponible.

[25] Nicola Vicentino. *L'antica Musica ridotta alla Moderna Prattica*. 1555.